1. Deskriptive Statistik

1.1 Eindimensionale Häufigkeitsverteilungen (Bezug auf ein einziges Merkmal)

a) einfache Häufigkeitsverteilungen

n — **Gesamtzahl der Merkmalsträger** $\sum_{i=1}^{v} h_i = n$

x_i — **Merkmalswert**

v — **Anzahl verschiedener Merkmalswerte**

h_i — **absolute einfache Häufigkeit**
Anzahl Merkmalsträger mit Merkmal x_i (die Summe ergibt n)

f_i — **relative einfache Häufigkeit**
Anzahl Merkmalsträger mit Merkmal x_i (Quotient; die Summe ergibt 1)

$$\frac{h_i}{n}$$

i — **Laufindex (Nummerierung)**

b) kumulierte Häufigkeitsverteilungen

H_i — **absolute kumulierte Häufigkeit,**
Anzahl der Merkmalsträger mit einem Merkmalswert (x_i), der kleiner oder gleich x_i ist.

$$H_i = \sum_{k=1}^{i} h_{kleiner\ gleich}$$

F_i — **relative kumulierte Häufigkeit,**
Anteil der Merkmalsträger mit einem Merkmalswert (x_i), der kleiner oder gleich x_i ist.

$$F_i = \frac{H_i}{n}$$

HR_i — **absolute kumulierte Resthäufigkeit**
Anzahl der Merkmalsträger mit einem Merkmalswert (x_i), der grösser x_i ist.

$$HR_i = n - H_i$$

FR_i — **relative kumulierte Resthäufigkeit**
Anteil der Merkmalsträger mit einem Merkmalswert (x_i), der grösser x_i ist.

$$FR_i = 1 - F_i$$

1.2 Mehrdimensionale Häufigkeitsverteilungen (Bezug auf mehrere Merkmale)

h_i — **Absolute einfache Häufigkeiten**

Vorspalte: Merkmalswerte für Merkmal X (x_i) — Summenspalte: $\sum_{k=1}^{5\ \text{(Laufindex)}} h_{ik}$ Eindimensionale Verteilung für X

Kopfzeile: Merkmalswerte für Merkmal Y (y_k) — Summenzeile: $\sum_{k=1}^{4\ \text{(Laufindex)}} h_{ik}$ Eindimensionale Verteilung für Y

Schnittpunkt Summenspalte und -zeile: n

$h_i + H_i$ — **Absolute einfache (einf) und kumulierte (kum) Häufigkeiten**

Vorspalte: Merkmalswerte für Merkmal X (x_i) — Summenspalte: $\sum_{k=1}^{5\ \text{(Laufindex)}} h_{ik}$ Eindimensionale Verteilung für X
Keine Summe kum

Kopfzeile: Merkmalswerte für Merkmal Y (y_k) — Summenzeile: $\sum_{k=1}^{4\ \text{(Laufindex)}} h_{ik}$ Eindimensionale Verteilung für Y
Keine Summe kum

Spaltenaufteilung: Zwei Zellen **einf** und **kum** — Schnittpunkt Summenspalte und -zeile: n

H_{ik} **kum** =

	y_1		y_2		y_3	
x_1	h_{11}		h_{12}		h_{13}	
x_2	h_{21}		h_{22}		h_{23}	
x_3	h_{31}		h_{32}		h_{33}	H_{33}
x_4	h_{41}		h_{42}		h_{43}	

$$h_{11} + h_{12} + h_{13} + h_{21} + h_{22} + h_{23} + h_{31} + h_{32} + h_{33} = H_{33}$$

$f_i + F_i$ — **Relative einfache (einf) und kumulierte (kum) Häufigkeiten** (gleiches Verfahren wie $\mathbf{h_i + H_i}$)

Variante A: $f_i = \frac{h_i}{n}$ $F_i = \frac{H_i}{n}$

Variante B: $h_{11} + h_{12} + \ldots + H_{ik}$ (wie oben $\mathbf{h_i + H_i}$)

Schnittpunkt Summenspalte und -zeile: 1

1.3 Klassifizierte Häufigkeitsverteilungen

a) Darstellung

j	**Laufindex für die Klassen (Klassenindex)**		
x^u_j	**Untergrenze der Klasse j** (von)	x^o_j	**Obergrenze der Klasse j** (bis unter)
hj	**Absolute einfache Klassenhäufigkeit** $x^u_j \leq x_i < x^o_j$		
Hj	**Absolute kumulierte Klassenhäufigkeit** $x_i < x^o_j$		
fj	**Relative einfache Klassenhäufigkeit** $\frac{h_j}{n}$		
Fj	**Relative kumulierte Klassenhäufigkeit** $\frac{H_j}{n}$		

b) Interpolation (Näherungsweise Häufigkeitsberechnungen)

Gesucht ist ein Merkmalswert x_i zwischen x^u_j und x^o_j

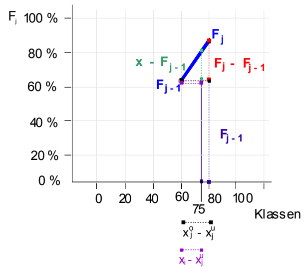
Formel für die **relative kumulierte Häufigkeit** für einen Wert x_i aus der **j-ten Klasse**:

$$F(x_i) = F_{j-1} + \frac{x_i - x^u_j}{x^o_j - x^u_j} \cdot (F_j - F_{j-1})$$

oder

Steigungsdreieck: (auch für H_j möglich)

$$\frac{x - F_{j-1}}{x_i - x^u_j} = \frac{F_j - F_{j-1}}{x^o_j - x^u_j}$$ (nach x auflösen)



1.4 Grafische Darstellungsarten

a) Kreisdiagramm (Flächenproportional, einfache Häufigkeitsverteilungen)

Fläche = $r^2 \cdot \pi$ (r = Radius)

Flächenproportionalität = $\frac{\text{Fläche Kreis 1}}{n_{(\text{Kreis 1})}} \cdot n_{(\text{Kreis 2})}$ = Fläche Kreis 2 → Radius berechnen Kreis 2 : π √

b) Histogramm (Flächenproportional, einfache klassifizierte Häufigkeitsverteilungen)

d **Häufigkeitsdichte =** $\frac{\textbf{Absolute einfache Häufigkeit } h_i}{\textbf{Klassenbreite}}$

Breite der Säulen: **Klassenbreite**
Höhe der Säulen: **Häufigkeitsdichte**
Anzahl Merkmalsträger je Klasse = **d · Klassenbreite**

c) Polygonzug (einfache klassifizierte Häufigkeitsverteilungen, Flächenproportional)

Abzisse (x)	**Klassen**
Ordinate (y)	**Häudigkeitsdichte d**
x_i	**Klassenmitte** im Koordinatensystem

Anfangsrand = $\frac{\textbf{Erste Häufigkeitsdichte}}{\textbf{2}}$ **Endrand =** $\frac{\textbf{Letzte Häufigkeitsdichte}}{\textbf{2}}$

d) Treppenfunktion (kumulierte nicht-klassifizierte Häufigkeitsverteilungen)

Abzisse (x)	**Merkmal**
Ordinate (y)	H_i

e) Summenpolygon (Ogive) (kumulierte klassifizierte Häufigkeitsverteilungen)

Abzisse (x) **Klassen**
Ordinate (y) **H_i der Klassenobergrenze** und/oder **F_i** (= Empirische Verteilungsfunktion)
Anfangspunkt der ersten Klasse = 0

1.5 Statistische Messzahlen

a) Lageparameter

Mo **Modus**

Merkmalswert x_i, der am meisten absolute Häufigkeiten h_i aufweist

Klassifizierten Häufigkeitsverteilungen (Feinbestimmung) (Unterschiedliche Klassenbreiten: h_j = d)

$$Mo = x^u_m + (x^o_m - x^u_m) \cdot \frac{h_m - h_{m-1}}{(h_m - h_{m-1}) + (h_m - h_{m+1})}$$

h_m Absolute einfache Häufigkeit der Klasse mit der grössten Klassenhäufigkeit

Me **Median (Quantil)**

Mittlere Position aller Merkmalsträger (50%) ausgedrückt in Merkmalswert x_i

$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ **bei ungeradem n**

x_i = Merkmalswert des Merkmalsträgers mit der Positionsziffer i.

$Me = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right)$ **bei geradem n**

x_i = Merkmalswert des Merkmalsträgers mit der Positionsziffer i.

Me **Median bei Klassifizierten Häufigkeitsverteilungen**

1. Bestimmung der Medianklasse = Klasse (x) mit dem Merkmalsträger mit der Positionsziffer i, **i =** $\frac{(n+1)}{2}$ (H_j-Nr)

$$Me = x^u{}_m + \frac{(n/2) - H_{m-1}}{H_m - H_{m-1}} \cdot (x^o{}_m - x^u{}_m)$$

(sh. Abb. bei Interpolation, für H_j)

D_x **Dezentile**

Zerlegung der Gesamtheit n in zehn Zehntel

1. Bestimmung der Dezentilsklasse = Klasse (x) mit dem Merkmalsträger mit der Positionsziffer i, **i =** $\frac{(n+1)}{10}$ (H_j-Nr)

$$D_9 = x^u{}_m + \frac{(n \cdot 9/10) - H_{m-1}}{H_m - H_{m-1}} \cdot (x^o{}_m - x^u{}_m)$$ (neuntes Dezentil, Merkmalswert x_i mit 90 % aller Merkmalsträger)

(sh. Abb. bei Interpolation, für H_j)

P_x **Perzentile: Hundert Hundertstel**

Q_x **Quartile: vier Viertel**

$\bar{x}$ **Arithmetisches Mittel** (häufigster Merkmalswert)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{v} (x_i \cdot h_i)}{n}$$

Ergebnis ist der häufigste Merkmalswert

Arithmetisches Mittel bei klassifizierten Häufigkeitsverteilungen

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{v} (x^l{}_i \cdot h_i)}{n}$$

$x^l{}_j$ = Klassenmitte

F_{GM} **Geometrisches Mittel**

Durchschnittlicher Vergrösserungs- oder Verkleinerungsfaktor

Wachstumsfaktor $F = \frac{\text{Wert zum späteren Zeitpunkt}}{\text{Wert zum frühen Zeitpunkt}}$

$\text{Wert}_{\text{Jahr } j} \cdot \text{Wachstumsfaktor } F = \text{Wert}_{\text{Jahr } j+1}$

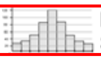
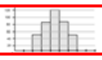
Wachstumsfaktor – 1 · 100 = Jährl. Prozentuale Veränderung

$$F_{GM} = \sqrt[n]{\frac{\text{Endwert}}{\text{Anfangswert}}}$$

n = Anzahl Wachstumsfaktoren

$$F_{GM} = \sqrt[n]{F_1 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_n}$$

n = Anzahl Wachstumsfaktoren

b) Streuungsparameter  Breite Streuung  Enge Streuung

R **Spannweite (Variabilität, Variationsbreite, Range)** (z.B. bei Börsenkursen)

Distanz zwischen dem kleinsten und dem grössten Merkmalswert (intervallskaliert, reagiert sehr auf Ausreisser)

Für die **aufsteigend geordneten Merkmalswerte** $x_1, x_2 \ldots x_N$ gilt: $R = x_n - x_1$ (x_n ist der letzte Merkmalswert)

Klassifizierte Häufigkeitsverteilungen: $R = x^o{}_v - x^u{}_1$

ZQA **Interquartilsabstand (Zentraler Quartilsabstand)**

Entfernung zwischen den beiden Merkmalswerten x, welche die in der Rangordnung gelegenen 50 % der Merkmalsträger eingrenzen (intervallskaliert, keine Ausreisser)

$ZQA = Q_3 - Q_1$ $Q_1 = x_{\left(\frac{n+1}{4}\right)}$ $Q_2 = x_{\left(\frac{3(n+1)}{4}\right)}$ x_i = Merkmalswert des Merkmalsträgers mit der Positionsziffer i.

Klassifizierte Häufigkeitsverteilungen:

Zuerst müssen die Klassen von 25 % (25 % von n = ? →in welcher Klasse?) und von 75 % bestimmt werden

$$ZQA = Q_3 - Q_1 \qquad Q_1 = x^u{}_m + \frac{(n \cdot 1/4) - H_{m-1}}{H_m - H_{m-1}} \cdot (x^o{}_m - x^u{}_m) \qquad Q_3 = x^u{}_m + \frac{(n \cdot 3/4) - H_{m-1}}{H_m - H_{m-1}} \cdot (x^o{}_m - x^u{}_m)$$

δ **Mittlere absolute Abweichung** (sehr geeignet in der beschreibenden Statistik)

Durchschnittliche Entfernung aller beobachteten Merkmalswerte vom arith. Mittel (intervallskaliert, Ausreisser)

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1} (|x_i - \bar{x}| \cdot h_i)$$ (| Betrag | bedeutet Rechnen ohne Vorzeichen)

Klassifizierte Häufigkeitsverteilung: $\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} (|x^l{}_i - \bar{x}| \cdot h_i)$ Klassenmitten $x^l{}_j$

σ **Varianz und Standardabweichung** (intervallskaliert, Ausreisser, fehlende Anschaulichkeit, für schliess. Statistik)

Varianz: Summe der quadrierten Abweichungen der Merkmalswerte vom arith. Mittel ~~dividiert durch n.~~

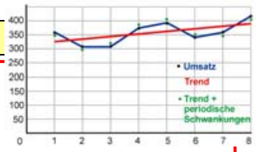
Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1} [(x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i]$ (auch f_i möglich) **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} [(x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i]}$

Klassifizierte Häufifkeitsverteilungen: Merkmalswerte x_i durch die Klassenmitten $x^l{}_j$ ersetzen

VK **Variationskoeffizient** (geeignet für den Vergl. von Streuungen von Häufigkeitsverteilungen unterschied. Lagen)

Die Standardabweichung wird als Prozentsatz des arithmetischen Mittels ausgedrückt (intervallskaliert)

$$VK\,\% = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \quad \text{bzw. falls } x < 0\text{:} \quad VK\,\% = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} \cdot 100$$



1.6 Zeitreihenanalyse (Zeitreihe: Zeitlich geordnete Folge von Merkmalswerten)

Komponenten der Zeitreihe

Trend	Grundrichtung der Entwicklung
Periodische Schwankungen	Periodisch wiederkehrende Schwankungen um den Trend
Restkomponente	Einmalig wirkende Grössen die wiederholt aber unregelmässig wirken

Quartal y_i Umsatz im Quartal **T_i** Trend Quartal i **S_i** periodische Schwankung Quartal i **R_i** Restkomponente Quartal i

$\mathbf{y_i = T_i + S_i + R_i}$ (Additiver Zusammenhang: Die Komponenten wirken unabhängig voneinander) (Multiplikativ: $y_i = T_i \cdot S_i \cdot R_i$ abhängig)

Methode der gleitenden Durchschnitte (Trendermittlung) Tabelle:

Periode
Werte
g D 2

(Den Perioden Durchschnitte zuteilen!)

g D a **gleitender Durchschnitt ungerader (a) Ordnung** (mit zunehmenden Wert wird d. gleitende Durchschnitt glätter)

a ist ungerade (3, 5) $\quad \mathbf{g\,D\,3 = \frac{Wert_1 + Wert_2 + Wert_3}{3}}$ (g D für die mittlere Periode$_2$)

g D b **gleitender Durchschnitt gerader (b) Ordnung**

b ist gerade (2, 4) $\quad \mathbf{g\,D\,4 = \frac{(Wert_1:2) + Wert_2 + Wert_3 + Wert_4 + (Wert_5:2)}{4}}$ (g D für Periode$_3$)

Laufen die periodischen Schwankungen über 4 Perioden muss g D mind. von der Ordnung 4 sein, 8, 12 auch möglich.

Methode der kleinsten Quadrate (Trendermittlung) x_i Quartal und y_i Umsatz

a) Linearer Verlauf

Quartale 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 …, nicht Quartal 1, 2, 3, 4, 1, 2 etc.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) + \left(-n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(-n \cdot \bar{x}^2\right)} \qquad a = \bar{y} - (b \cdot \bar{x})$$

Trendgerade $\hat{y} = b \cdot x + a$

b) Nicht-Linearer Verlauf
(nur für Exponentialfunktion
nicht Potenzfunktion)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \overline{\ln(y)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)}{n} \qquad \ln(b) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(y_i)\right) + \left(-n \cdot \bar{x} \cdot \overline{\ln(y)}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(-n \cdot \bar{x}^2\right)}$$

$\ln(a) = \overline{\ln(y)} - \ln(b) \cdot \bar{x}$ $\quad$ ln(a) und ln(b) delogarithmieren mit e^x $\quad$ Trendgerade $\hat{y} = a \cdot b^x$

Ermittlung der periodischen Schwankungen

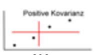
Quartal	Umsatz	Trend	Abweichungen vom Umsatz	Saison-Normale	Saisonale Schwankungen
			1. Q 2. Q 3. Q 4. Q	= Durchschnitt der Abweichungen	= Trend + Saison-Normale
			= Umsatz – Trend	des jeweils 1. Q (1. Q + 5 Q):2 etc.	

1.7 Regressions- und Korrelationsrechnung (Beschreibung des Zusammenhangs zwischen zwei Datensätzen)

$\hat{y}$ **Regressionsgerade bestimmen mittels Methode der kleinsten Quadrate** **Streudiagramm erstellen**

σ^2_{xy} **Kovarianz** (kein Ausmass der Abhängigkeit, sondern nur der Gleich- oder Gegenläufigkeit)

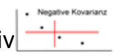
Gemeinsame Varianz der x- und y-Werte



$$\sigma^2_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]$$

n = Anzahl, nicht Summe der x_i-Werte

▫ x und y zunehmend (gleichläufig) = σ^2_{xy} positiv ▫ für x zu- und y abnehmend (gegenläufig) = σ^2_{xy} negativ



r **Korrelationskoeffizient** (Masskorrelation, Produkt-Moment-Koeffizient, Bravais-Pearson)

Es können nur mehr Werte zwischen -1 und 1 entstehen, daher ***r* є = [1; -1].**

$$r = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad \sigma_x = \text{Standardabweichung } \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \sigma_y = \text{Standardabweichung} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} (y_i - \bar{y})^2}$$

▫ Vorzeichen gibt gleichläufig oder gegenläufig an
▫ Je näher r bei ±1 liegt, desto stärker ist der Zusammenhang zwischen Merkmalswerten und Regressionsgerade

R^2 **Bestimmtheitsmass** (x und y intervallskaliert)

R^2 informiert, welcher Teil der Varianz durch die Regression bestimmt werden kann. **R^2 є = [1; -1].** Also ob die Regressionsgerade (Methode der kl. Quadrate) den Zusammenhang von x und y gut oder schlecht wiedergibt. Je näher der Wert von R^2 bei ±1 (100 %), desto stärker ist der Zusammenhang. 0 = kein Zusammenhang.
Das Bestimmtheitsmass wird 1, wenn die Fläche der kleinsten Quadrate 0 ist → $\sum_{i=1}^{v} (y_i - b \cdot (x_i - \bar{x}) - \bar{y})^2 = 0$

$$R^2 = \frac{(\sigma^2_{xy})^2}{\sigma^2_x \cdot \sigma^2_y} \; (\% \cdot 100) \qquad \sigma^2_x = \text{Varianz } \sigma = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} (x_i - \bar{x})^2 \qquad \sigma^2_y = \text{Varianz} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v} (y_i - \bar{y})^2$$

$R^2 = r^2$ R^2 drückt aus, dass … % der Gesamtvarianz σ^2_{xy} durch die Varianz der Regressionswerte $\sigma^2_{\hat{y}}$ bestimmt werden kann. (Das heisst, dass … % von y_i von x_i abhängig ist.)

Weitere Berechnungsmöglichkeiten: $\sigma^2_y = \sigma^2_{\hat{y}}$ ($\hat{y}$ auf der Regressionskurve berechnen) $+ \sigma^2_{y-\hat{y}}$ Varianzzerlegung $\qquad R^2 = \frac{\sigma^2_{\hat{y}}}{\sigma^2_y} \qquad R^2 = b^2 \cdot \frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_y}$

U^2 **Unbestimmtheitsmass: $U^2 = 1 - R^2$** (Anteil der Abweichung, der nicht durch die Regression bestimmt wird)

ρ **Rangkorrelation** (Merkmale, die nur ordinalskaliert sind)

▫ Die Merkmale werden hinsichtlich der beiden Merkmale in eine Rangordnung gebracht
▫ Sind zwei oder mehr Merkmale gleich, dann wird beiden Merkmalen das arith. Mittel der Ränge zugeordnet

$$\rho = r = \frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Der Zusammenhang zwischen den Rängen, nicht zwischen Merkmalswerten wird untersucht.

▫ Sind die Merkmale **vollständig** oder fast vollständig unterschiedlich (keine arith. Mittel bei der Rangzuordnung):

$$\rho \text{ (griech. Rho)} = r = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n^3 - n}$$

wobei D_i = **Rang(x_i) – Rang(y_i)**

Wein	Bewertung x_i	Preis y_i	Rang x_i	Rang y_i
A	ausreichend	13.50	5	5
B	mangelhaft	15.20	6	4
C	**gut**	16.30	**2.5**	3
D	sehr gut	18.50	1	1
E	befriedigend	17.40	4	2
F	**gut**	12.90	**2.5**	6

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ausmass der Sicherheit, mit der ein möglicher Ausgang eintritt ausdrücken)

Zufallsvorgang: Ausgang kann aufgrund von Unkenntnis oder Unwissenheit nicht vorhergesagt werden

Ω **Ereignisraum:** Menge aller möglichen Elementarereignisse
- **Diskreter Ereignisraum:** endlich, abzählbar viele Elementarereignisse (nicht unendlich)
- **Stetiger Ereignisraum:** unendlich, überabzählbar viele Elementarereignisse (unendlich)

Elementarereignis: Einzelne, sich gegenseitig ausschliessende möglichen Ausgänge eines Zufallsvorganges

A B C **Ereignis:** Gesuchter Ausgang des Zufallsvorgangs A = {…}
- **Sicheres Ereignis:** Ereignis, dass alle Elementarereignisse eines Ereignisraumes umfasst
- **Unmögliches Ereignis E = ø:** Ereignis, dass keine Elementarereignisse eines Ereignisraumes umfasst

2.1 Direkte Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten (Zufallsvorgang wird tatsächlich oder gedanklich durchgeführt)

Klassische Wahrscheinlichkeitsermittlung (a-priori-Wahrscheinlichkeit, Laplace-Wahrscheinlichkeit, von Bernoulli**)**

Voraussetzung: diskrete Elementarereig. u. diese sind gleich wahrscheinlich; Rein-gedanklich, nicht tatsächlich

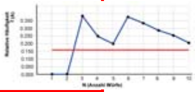
$$W(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl der gleich möglichen Elementarereignisse (Anzahl Elemente } \Omega)}$$

Geometrische Wahrscheinlichkeitsermittlung für stetige Elementarereignisse: Einteilung in Intervalle

Statistische Wahrscheinlichkeitsermittlung (a-posteriori-Wahrscheinlichkeit, R. von Mises, von Bernoulli**)**

Voraussetzung: unter identischen Bedingungen tatsächlich wiederholte Durchführung des Zufallsvorgangs

$$W(A) = \text{Relative Häufigkeit } f_i = \frac{\text{Anzahl der Zufallsvorgänge mit Ereignis A}}{\text{Anzahl der Zufallsvorgänge insgesamt (n)}}$$



W(A) entspricht der relativen Häufigkeit (Grenzwert) wenn n → ∞. (Gesetz der grossen Zahl von Bernoulli)

Subjektive Wahrscheinlichkeitsermittlung (a-priori-Wahrscheinlichkeit)

Sachkundige Personen beurteilen rein gedanklich die Möglichkeit des Eintretens eines Ereignisses zahlenmässig.

2.2 Indirekte Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten (Ableitung der Wahrscheinlichkeit aus anderen Ereignissen)

Relationen von Ereignissen

- **Vereinigung von Ereignissen** *(mindestens eines von mehreren Ereignissen soll eintreffen)*
  Alle Elementarereignisse, die entweder in **A oder B oder in A und B** vorkommen gehören zu **A ∪ B.**
- **Durchschnitt von Ereignissen** *(mehrere Ereignissen sollen zugleich eintreffen)*
  Alle Elementarereignisse, die **sowohl in A als auch in B** vorkommen gehören zu **A ∩ B.**
  Disjunkte Mengen: Kein gemeinsames Elementarereignis; Durchschnitt der Mengen ist leer A ∩ B = { } = ø
- **Komplementärereignis**
  Das zu A komplementäre Ereignis $\bar{A}$ trifft dann ein, wenn das Ereignis A nicht eintritt.
- **Logische Differenz**
  A \ B umfasst alle Elementarereignisse von A, die nicht Elementarereignisse von B sind.
- **Symmetrische Differenz**
  Die symmetrische Differenz besteht aus den Elementarereignissen der Vereinigung ohne die Elementarereignisse des Durchschnitts. A°B = A \ B ∪ B \ A
- **Vollständiges Ereignissystem**
  Zerlegung des Ereignisraumes Ω in paarweise disjunkte Ereignisse.
- **Teilereignis**
  Sind die Elemente eines Ereignisses B in A enthalten, so wird Ereignis B als Teilereignis von A bezeichnet.

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten (Axiome von Adrej Kolmogoroff)

1 Nichtnegativität W(A) ≥ 0 2 Normierung W(Ω) = 1 = 100 % 3 Additivität W(A ∪ B) = W(A) + W(B)

Additionssatz

Die Wahrscheinlichkeit, dass **mindestens eines von zwei Ereignissen A und B eintritt** beträgt:

W(A ∪ B) = W(A) + W(B) – W(A ∩ B)

W(A ∪ B ∪ C) = W(A) + W(B) + W(C) – W(A ∩ B) – W(A ∩ B) – W(B ∩ C) + (A ∩ B ∩ C)

Disjunkte Ereignisse: $\sum_{i=1}^{n} W(A_i)$ (Einzelwahrscheinlichkeiten aufaddieren)

Ω = {Zweimaliges Werfen eines Würfels}
A = {Werfen eines Pasches) {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}
B = {Augenzahlsumme ≤ 4} {(1,1), (1,2). (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)}
W(A∪B) = 6/36 + 6/36 – 2/36 = 11/36

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für das **Ereignis A unter der Bedingung des Ereignisses B** (B ist eingetreten).
Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der verbleibenden günstigen Fälle zu den verbleibenden gleichmöglichen Fälle. Welche Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen, kommen in B vor? Den B tritt sowieso ein.

$$W(A \mid B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen (Wird durch den Eintritt eines Ereignisses A der Eintritt eines Ereig. B beeinflusst?)

Zwei Ereignisse sind voneinander **unabhängig wenn gilt:**

W(A) = W(A | B) oder **W(A) = W(A | $\bar{B}$)** oder **W(A | B) = W(A | $\bar{B}$)**

Multiplikationssatz

Die Wahrscheinlichkeit, dass **zwei Ereignisse A und B gemeinsam eintreten** beträgt **(abhängige Ereignisse):**

W(A ∩ B) = W(A) · W(B | A) oder **W(A ∩ B) = W(B) · W(A | B)**

$W(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = W(A_1) \cdot W(A_2 \mid A_1) \cdot W(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot W(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$ (Baumdiagramm!)

Unabhängige Ereignisse: W(A ∩ B ∩ C) = W(A) · W(B) · W(C)

- Die Endwahrscheinlichkeiten ergeben sich durch multiplizieren der auf dem Weg des **Baumdiagramms** liegenden W(A).

Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses

Das zu A komplementäre Ereignis $\bar{A}$ trifft dann ein, wenn das Ereignis A nicht eintritt.

$W(A) = 1 - W(\bar{A})$

Totale Wahrscheinlichkeit

Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \dots A_n$ ein **vollständiges Ereignissystem** (Alle A_i bilden als paarweise disjunkte Ereignisse Ω) und ist B ein beliebiges Ereignis:

$$W(B) = \sum_{i=1}^{n} W(A_i) \cdot W(B|A_i)$$

Satz von Bayes

Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \dots A_n$ ein **vollständiges Ereignissystem** (Alle A_i bilden als paarweise disjunkte Ereignisse Ω) und ist B ein beliebiges Ereignis:

$$W(A_i|B) = \frac{W(A_i) \cdot W(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} W(A_i) \cdot W(B|A_i)}$$

Logische Differenz

A \ B umfasst alle Elementarereignisse von A, die nicht Elementarereignisse von B sind.

$W(A \setminus B) = W(A) - W(A \cap B)$

Symmetrische Differenz

Symmetrische Differenz: $A°B = A \setminus B \cup B \setminus A$

$W(A°B) = W(A) - W(A \cap B) + W(B) - W(A \cap B)$

2.3 Elementare Kombinatorik

Die Kombinatorik ermittelt die **Anzahl Möglichkeiten für das Auswählen** oder das **Anordnen der Elemente**.

Additionsregel

Die Menge Ω sei in die disjunkten Teilmengen A_i i = 1 bis k zerlegt.
m sei die Anzahl der Elemente in Ω
n_i, i = 1 bis k sei die Anzahl Elemente in A_i
$m = n_1 + n_2 + \dots n_k$ $\quad 31 = 4 + 2 + 4 + 3 + 9 + 3 + 6$

Multiplikationsregel

In einer Abfolge von k Schritten habe man fr den ersten Schritt m_1 Möglichkeiten, für den zweiten Schritt m_2 Möglichkeiten. Dann bestehen für die Ausführung aller k Schritte $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots m_k$ Möglichkeiten.

für k = 3: $\quad 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten

Permutationen

Keine Auswahlmöglichkeit: Es werden immer alle vorgegebenen Elemente eingebracht.

Permutation ohne Wiederholung (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

Jedes Element ist genau einmal vorgegeben und wird genau einmal in die Anordnung eingebracht.

Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Wie viele verschiedene siebenstellige Zahlen können wir bilden, wenn wir jeweils nacheinander alle sieben Kugeln ziehen (ohne Zurücklegen) um eine siebenstellige Zahl zu erhalten?

7 (Möglichkeiten) $\cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ Möglichkeiten

Permutation mit Wiederholung (1, 1, 2, 2, 2, 3, 4)

Gewisse Elemente sind mehr als einmal vorgegeben, es ist also keine Menge vorgegeben.
Sieben Kugeln sind mit den Zahlen 1, 1, 2, 2, 2, 3 und 4 beschriftet. Wie viele verschiedene siebenstellige Zahlen können wir bilden, wenn wir jeweils nacheinander alle sieben Kugeln ziehen (ohne Zurücklegen) um eine siebenstellige Zahl zu bilden?

$$P^W_{n1, n2 \dots nk}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots n_k!}$$

Anzahl Zahlen zur Auswahl

$$\frac{7!}{2! \cdot 3!} = 420 \text{ Permutationen (Möglichkeiten}$$

1 kommt 2 mal vor 2 kommt 3 mal vor

Variation ohne Wiederholung (1, 2, 3, 4)

- Es werden nicht alle Zahlen verwendet für die Anordnung (im Beispiel k = 2, n = 4).
- Die Anordnung der Zahlen wird berücksichtigt, d.h. es wird unterschieden ob ein Element vorher oder nachher gezogen wird (2,1 ist nicht 1,2)
- Kein Zurücklegen, d.h. keine Wiederholungen (→ kein 1,1, 2,2 möglich)

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad V_k(4) = \frac{4!}{(4-2)!}$$

n = Anzahl Zahlen zur Auswahl; k =Anzahl Stellen

Variation ohne Wiederholung

	1,2	1,3	1,4
2,1		2,3	2,4
3,1	3,2		3,4
4,1	4,2	4,3	

Variationen mit Wiederholung (1, 2, 3, 4)

- Es werden nicht alle Zahlen verwendet für die Anordnung (im Beispiel k = 2, n = 4).
- Die Anordnung der Zahlen wird berücksichtigt, d.h. es wird unterschieden ob ein Element vorher oder nachher gezogen wird (2,1 ist nicht 1,2)
- Zurücklegen, d.h. Wiederholungen sind möglich (→ 1,1, 2,2 möglich)

$$V_k^W(n) = n^k \qquad 4^2 = 16$$

k =Anzahl Stellen; n =Anzahl Zahlen zur Auswahl

Variation mit Wiederholung

1,1	1,2	1,3	1,4
2,1	2,2	2,3	2,4
3,1	3,2	3,3	3,4
4,1	4,2	4,3	4,4

Kombinationen ohne Wiederholung (1, 2, 3, 4)

- Es werden nicht alle Zahlen verwendet für die Anordnung (im Beispiel k = 2, n = 4).
- Die Anordnung der Zahlen wird nicht berücksichtigt, d.h. es wird nicht unterschieden ob ein Element vorher oder nachher gezogen wird (2,1 ist dasselbe wie 1,2)
- Kein Zurücklegen, d.h. keine Wiederholungen (→ kein 1,1, 2,2 möglich)

$$K_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad K_k(4) = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = 6$$

n = Anzahl Zahlen zur Auswahl
k = Anzahl Stellen

Kombination ohne Wiederholung		
1,2	1,3	1,4
	2,3	2,4
		3,4

Kombination mit Wiederholung (1, 2, 3, 4)

- Es werden nicht alle Zahlen verwendet für die Anordnung (im Beispiel k = 2, n = 4).
- Die Anordnung der Zahlen wird nicht berücksichtigt, d.h. es wird nicht unterschieden ob ein Element vorher oder nachher gezogen wird (2,1 ist dasselbe wie 1,2)
- Zurücklegen, d.h. Wiederholungen sind möglich (→ 1,1, 2,2 möglich)

$$K_k^W(n) = \frac{(n+k-1)!}{[(n+k-1)-k]! \cdot k!} \qquad K_k^W(4) = \frac{(4+2-1)!}{[(4+2-1)-2]! \cdot 2!} = 10$$

n = Anzahl Zahlen zur Auswahl
k = Anzahl Stellen

Kombination mit Wiederholung			
1,1	1,2	1,3	1,4
	2,2	2,3	2,4
		3,3	3,4
			4,4

2.4 Zufallsvariable

Begriff der Zufallsvariablen

Ein Unternehmen führe auf dem Markt zwei Produkte A und B ein. Die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Markteinführung wird auf 80 % und 90 % geschätzt.

A = {Erfolg mit A} W(A) = 80 % W($\bar{A}$) = 20 %
B = {Erfolg mit B} W(B) = 90 % W($\bar{B}$) = 10 %

Zufallsvariable: Anzahl der Erfolge	
Realisation	Wahrscheinlichkeit
0	**0.02**
1	0.08 + 0.18 = **0.26**
2	**0.72**

Die Zufallsvariable X ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis aus dem Ereignisraum Ω eine reelle Zahl x zuordnet. Die Zufallsvariable X ist eine Variable, die bestimmte Realisationen x mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten annimmt.

Diskrete Zufallsvariable

Die Realisation der Zufallsvariabeln wird durch einen Zählvorgang festgestellt (z.B. Anzahl Kunden)

Stetige Zufallsvariable

Die Realisation der Zufallsvariabeln wird durch einen Messvorgang festgestellt (z.B. Benzinverbrauch)

Als Synonyme verwendete Begriffe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsvariable X	Merkmal X
Wahrscheinlichkeit	Relative Häufigkeit
Wahrscheinlichkeitsfunktion	Einfache relative Häufigkeitsverteilung
Verteilungsfunktion	Kumulierte relative Häufigkeitsverteilung
Erwartungswert	Arithmetisches Mittel
Varianz	Varianz

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ordnet jedem Wert x_i der Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit zu.

Für das Lotto (6 aus 45) ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

i	Anzahl Richtige x_i	Wahrscheinlichkeit für x_i-Richtige
1	0	0.4005646367
2	1	0.4241272624
3	2	0.1514740223
4	3	0.0224405959
5	4	0.0013646308
6	5	0.0000287291
7	6	0.0000001228

$$f(x) = \begin{cases} 0.4005646367 & \text{für } x = 0 \\ 0.4241272624 & \text{für } x = 1 \\ 0.1514740223 & \text{für } x = 2 \\ 0.0224405959 & \text{für } x = 3 \\ 0.0013646308 & \text{für } x = 4 \\ 0.0000287291 & \text{für } x = 5 \\ 0.0000001228 & \text{für } x = 6 \end{cases} \qquad f(x) = \left\{ \frac{\binom{6}{x} \cdot \binom{39}{6-x}}{\binom{45}{6}} \right.$$

Kombination ohne Wiederholung: $\left(\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\right)$

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen informiert darüber, wie gross die Wahrscheinlichkeit für eine Realisation ist, deren Wert kleiner oder gleich dem Wert x ist.

Die kumulierten Wahrscheinlichkeiten müssen bestimmt werden:

i	Anzahl Richtige x_i	Wahrscheinlichkeit für x_i-Richtige W(X = x_i) f(x_i)	W(X ≤ x_i) **Wahrscheinlichkeit, dass 6 oder weniger Richtige kommen
1	0	0.4005646367	0.4005646367
2	1	0.4241272624	0.8246918991
3	2	0.1514740223	0.9761659214
4	3	0.0224405959	0.9986065173
5	4	0.0013646308	0.9999711482
6	5	0.0000287291	0.9999998772
7	6	0.0000001228	**1.0000000000

Parameter

Erwartungswert (Arithmetisches Mittel) $E(x) = \sum_{i=1}^{v} [x_i \cdot f(x_i)]$

Varianz $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{v} \{[x_i - E(x)]^2 \cdot f(x_i)\}$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{v} \{[x_i - E(x)]^2 \cdot f(x_i)\}}$

Die Ungleichung von Tschebyscheff

Mit welcher Wahrscheinlichkeit realisiert sich eine Zufallsvariable X in einem Intervall, der symmetrisch um den Erwartungswert liegt.

$$W(E(x) - c \cdot \sigma < X < E(x) + c \cdot \sigma) > 1 - \frac{1}{c^2}$$

Die Ungleichheit ergibt eine gute Schätzung.

Bsp.: c = 2 $W(-0.7678 < X < 2.3678) > 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75 = 75\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit 0, 1, oder 2 richtige zu haben ist mindestens 75 %. (In Wirklichkeit: 0.976 → 97.6 %)

2.5 Binominalverteilung

Beispiel

Die Aufrechterhaltung einer Pumpstation ist gewährleistet, wenn 5, 6 oder sieben Motoren einsatzfähig sind.

A = {Motor läuft} W(A) = 0.95 Zufallsvariable X: Anzahl der laufenden Motoren

$\bar{A}$ = {Motor fällt aus} $W(\bar{A}) = 0.05$ Realisationen x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 Motoren laufen: $F(X \geq 5) = f(5) + f(6) + f(7)$

1. Schritt: Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf Motoren laufen?

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass genau fünf Motoren laufen?

Kombination ohne Wiederholung $\frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 21$

b) Wie gross ist die Eintretenswahrscheinlichkeit für jede der 21 Möglichkeiten?

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Motoren 1 – 5 laufen, während die Motoren 6 und 7 ausfallen beträgt:

$0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.05 \cdot 0.05 = 0.001934$

Für die 20 anderen Möglichkeiten sind die gleichen Faktoren zu multiplizieren, nur die Reihenfolge ändert.

c) Damit beträgt $f(5) = 21 \cdot 0.001934 = 0.0406 = \underline{4.06\ \%}$

2. Schritt: Dasselbe ausrechnen für f(6) und f(7)

3. Schritt: Die Wahrscheinlichkeiten addieren: $0.0406 + 0.2573 + 0.6983 = 0.9962 = \underline{99.62\ \%}$

Eigenschaften damit die Binominalverteilung angewendet werden kann

1. Der Zufallsvorgang wird n-mal identisch durchgeführt.
2. Der Zufallsvorgang besitzt genau zwei mögliche Ausgänge.
3. Die Wahrscheinlichkeiten für beide Ausgänge sind bei jedem Zufallsvorgang mit $W(A) = \Theta$ und $W(\bar{A}) = 1 - \Theta$

Formel $f_B(x|n;\Theta) = \binom{n}{x} \cdot \Theta^x \cdot (1-\Theta)^{n-x}$ $\Theta = 0.95$ im Beispiel W(A)

$$f_B(5|7;0.95) = \overset{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}{\binom{7}{5}} \cdot 0.95^5 \cdot (1-0.95)^{7-5} = \underline{4.06\ \%}$$

(Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 von sieben Motoren laufen)

Analog für die anderen x-Werte

Berechnung mit der Tabelle

Die Gegenwahrscheinlichkeit muss angewendet werden: $f_B(2|7;0.05) = \binom{7}{2} \cdot 0.05^2 \cdot (1-0.05)^5 = \underline{4.06\ \%}$