Die Zufallsvariable

Die Parameter (Kennzahlen) einer Zufallsvariablen: 1. *Erwartungswert* 2. *Varianz*	Bei diskreten Zufallsvariablen	$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x)=\mu$
	Bei stetigen Zufallsvariablen	$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)=\mu$
	Bei diskreten Zufallsvariablen	$Var(X)=V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2 \cdot f(x)=\sigma^2$
	Bei stetigen Zufallsvariablen	$Var(X)=V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 \cdot f(x)=\sigma^2$
	Formeln Varianz für TR umgeformt (diskret)	$V(x)=\sum_{i=1}^{n} x^2 \cdot f(x)-\mu^2=\sigma^2$
	Formeln Varianz für TR umgeformt (stetig)	$V(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx-\mu^2=\sigma^2$
Das Rechnen mit Zufallsvariablen	Für beliebige Zufallsvariablen gilt:	$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
		$E(aX)=a \cdot E(X)$
		$V(aX)=a^2 \cdot V(X)$
	Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen gilt:	$E(X \cdot Y)=E(X) \cdot E(Y)$
		$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
		$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$
Das $\sqrt{n}$ – Gesetz	Für die Summe $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$ von n unabhängigen Zufallsvariablen mit denselben Parametern gilt:	$\mu_z=n \cdot \mu$ und $\sigma_z=\sqrt{n} \cdot \sigma$

Die Binominalverteilung

Parameter:

n und Θ

Voraussetzungen Binominalverteilung:

1. *Diskrete Zufallsvariable*
2. *Dichotomer Ereignisraum (on-off)*
3. *Wahrscheinlichkeit Θ ist bekannt*
4. *Entnahme **mit** zurücklegen*

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f_B(x;\Theta;n) = W(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \Theta^x \cdot (1-\Theta)^{n-x}$$

Verteilfunktion:

$$\sum_{v=0}^{x} \binom{n}{v} \cdot \Theta^v \cdot (1-\Theta)^{n-v}$$

Kurzschreibweisen:

$B_{n,\Theta}$ oder $B(n,\Theta)$ resp. $B_{n,p}$ oder $B(n,p)$

Bei einer $B(n,\Theta)$ - verteilten Zufalls-variablen gilt:

Erwartungswert:

$$\mu = E(X) = n \cdot \Theta = n \cdot p$$

Varianz:

$$\sigma^2 = V(X) = n \cdot \Theta \cdot (1-\Theta) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot \Theta \cdot (1-\Theta)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Das Hypothesetestverfahren

Testverfahren: Signifikanztest

Formulierung der Hypothese:

-Hypothese H_1 (Vermutung)

-Nullhypothese H_0 (Testannahme)

α = Signifikantsniveau (Wahrscheinlichkeit, H_0 irrtümlicherweise abzulehnen)

$1-\alpha$ = Vertrauenswahrscheinlichkeit

Prinzip des indirekten Beweises: Man nimmt an, dass H_0 zutreffe. Sollte der Test diese Annahme falsifizieren, so wird H_0 abgelehnt und H_1 angenommen

Mehr dazu Skript Prof. V.Cho Kapitel 2 Seite 9ff.

Die Hypergeometrische Verteilung

Parameter: N,M und n	Voraussetzungen	Funktionen
	Voraussetzungen Hypergeometrische Verteilung: 1. *Diskrete Zufallsvariable* 2. *Dichotomer Ereignisraum (on-off)* 3. $N \geq M$ 4. *Ziehen **ohne** zurücklegen*	Wahrscheinlichkeitsfunktion: $W(X) = f_H = \frac{\binom{M}{X} \bullet \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ Verteilfunktion: $W(X \leq x) = F_H(X) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{M}{X} \bullet \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
Parameter: N,M und n	Bei einer Hypergeometrisch verteilten Zufallsvariablen gilt:	Erwartungswert: $\mu = E(X) = n \bullet \frac{M}{N}$ Varianz: $\sigma^2 = V(X) = n \bullet \frac{M}{N} \bullet \left(1 - \frac{M}{N}\right) \bullet \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
	Approximation der hypergeometrischen Verteilung: Wenn $\frac{n}{N} \leq 0.5$, dann kann mit der Binominalverteilung gearbeitet werden.	

Die Poissonverteilung

Parameter:

μ

Voraussetzungen für Poissonverteilung:

1. *Diskrete Zufallsvariable*
2. *Dichotomer Ereignisraum (on-off)*
3. *Unendliche Menge G*
4. *nicht möglich anzugeben wie oft das untersuchte Ereignis nicht eingetreten ist*
5. *Seltenes Ereignis*

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W(X=x)=f_p(x)=\frac{\mu^x}{x!}\bullet e^{-\mu}$$

Verteilfunktion:

$$F_p(X)=\sum_{k=0}^{x}\frac{\mu^k}{k!}\bullet e^{-\mu}=e^{-\mu}\bullet\sum_{k=0}^{x}\frac{\mu^k}{k!}$$

Tabelliert in Büchlein Kobelt/Steinhausen

Charakteristik der Poissonverteilung: (nach Lüthi)

1. $n \longrightarrow \infty$
2. Seltenes Ereignis
3. a.)**Approximation** mit Binominalverteilung wenn n>10 und Θ<0.05
   b.) **Standardfall:** μ ist gegeben, hingegen muss n und Θ gesucht werden

Achtung: Approximation mit Binominalverteilung hat eigene Formel (wurde nicht besprochen im Unterricht):

$$W(X=x)=f_p(x,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\bullet e^{-\lambda} \text{ mit } \lambda=np$$ als Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$W(X\le x)=F_p(x,\lambda)=\sum_{v=0}^{x}\frac{\lambda^x}{x!}\bullet e^{-\lambda} \text{ mit } \lambda=np$$ als Verteilfunktion

Die Normalverteilung

Parameter:
σ resp. σ^2 und μ

Bezieht sich auf **stetige Zufallsvariablen**, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Wert eintritt kann nicht gesagt werden, resp. =0!

Funktion der Normalverteilung

$$f_N(x;\mu;\sigma^2) = \frac{1}{\sigma \bullet \sqrt{2\pi}} \bullet e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^2}$$

Tabellen um Wahrscheinlichkeiten abzulesen finden wir im Büchlein von Kobelt/Steinhausen, Tab. 10! -> zuerst jedoch **transformieren in Standardnormalverteilung**

Die Standardnormalverteilung

Spezielle Normalverteilung mit
$\mu = 0$ und $\sigma = 1$

Umbenennung von x -> z in Standardnormalverteilung

Funktion der Standardnormalverteilung

$$f_n(z;0;1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Verteilfunktion

$$F_n(z;0;1) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$$

Transformation von Normalverteilung auf Standardnormalverteilung

$$z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma} \text{ und } z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

Allgemein: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Ablesen in Tabellen 10c, 10d ff. oder über Statistik Programm in TR eingeben.

<table>
<tr><th colspan="3">Approximation diskreter Verteilungen durch die Normalverteilung</th></tr>
<tr><td>Faustregel: Für $\sigma^2 > 9\ (\sigma > 3)$ kann eine binominalverteilte Zufallsvariable X als angenähert normalverteilt behandelt werden.</td><td colspan="2">Vorgehen:
1. Prüfen ob Approximation überhaupt möglich
2. Binominalformel von vorne nehmen</td></tr>
<tr><td>Grenzwertsatz von Moivre/Laplace:</td><td colspan="2">$z_1 = \frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ oder $z_2 = \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}$</td></tr>
<tr><td>Die Stetigkeitskorrektur</td><td>a -> a-0.5</td><td>b -> b+0.5</td></tr>
<tr><th colspan="3">Approximation der Poissonverteilung durch die Normalverteilung</th></tr>
<tr><td>Faustregel:

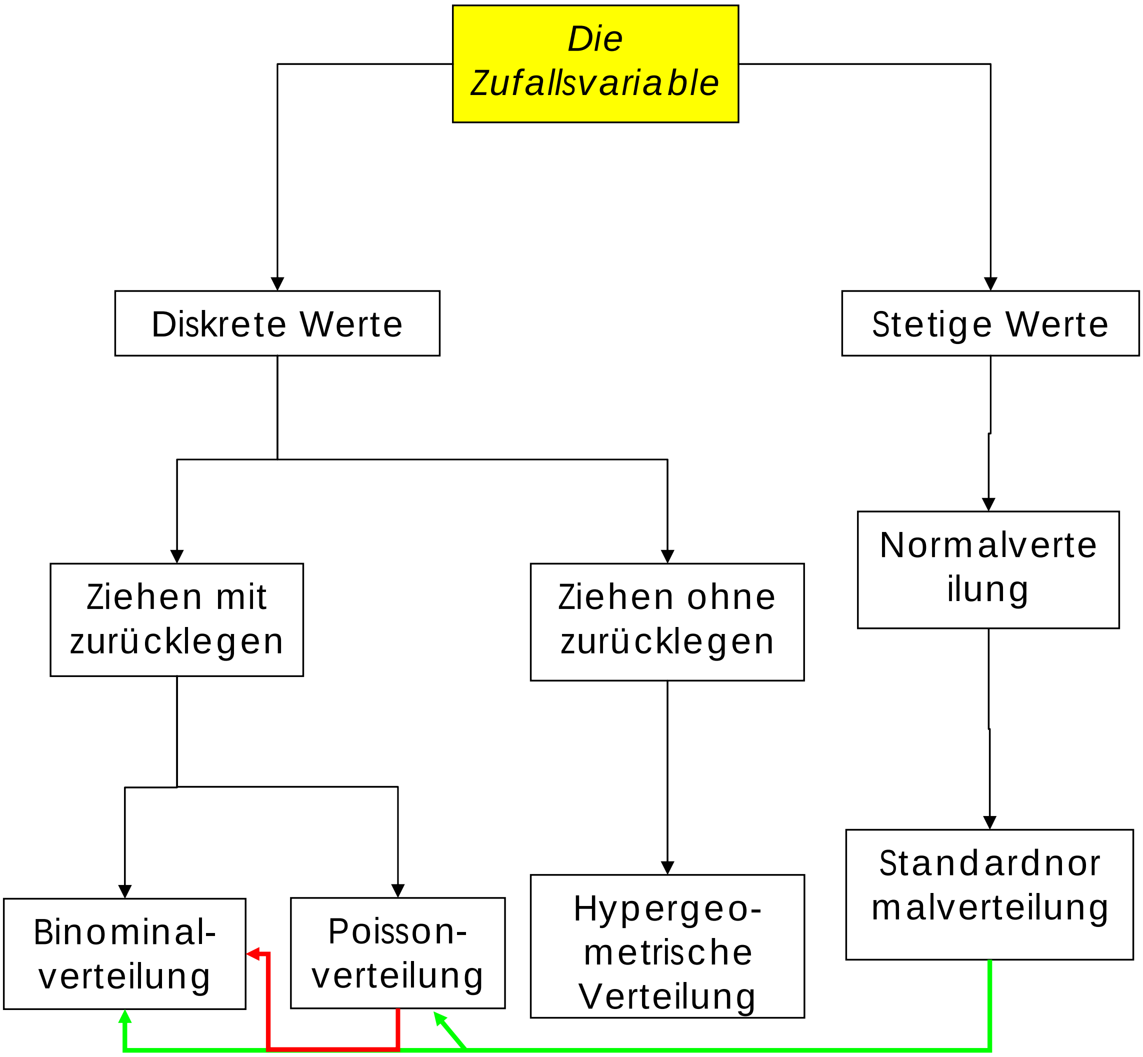
Hinreichende Genauigkeit für:

$\lambda \geq 9$</td><td>Für grosse Werte von λ nähert sich die Poissonverteilung P(λ) der Normalverteilung N($\mu;\sigma^2$) an mit :

$\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = \lambda \quad (\sigma = \sqrt{\lambda})$</td><td>Wenn Normalverteil-ung angewandt wird:

Stetigkeitskorrektur berücksichtigen</td></tr>
</table>

Entscheidungsdiagramm Übersicht



Achtung!: Approximationen der Binominal- und Poissonverteilung durch Standardnormalverteilung möglich. Auch Poisson kann durch Binominal approximiert werden.